ΠΡΟΤΑΣΗ: (Άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων)

Έστω $f, g: U \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$

τότε είναι συνεχής στο $\bar{x}_0$ και οι συναρτήσεις

$f+g$, $a \cdot f$ $(a \in \mathbb{R})$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g(\bar{x}_0) \neq 0)$ καθώς και

η $h \circ f$ για $h: V \to \mathbb{R}$ με $f(U) \subseteq V \subseteq \mathbb{R}$ συνεχής στο $f(\bar{x}_0)$

Απόδειξη

(βλ. άλγεβρα ορίων)

Παρατήρηση: Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f: U \to \mathbb{R}$ συμβολίζεται με

$C(U) = \{ f: U \to \mathbb{R} \ \ f \text{ συνεχής } (\forall \bar{x}_0 \in U) \}$

που είναι ένας διανυσματικός χώρος

Παράδειγμα: (ΒΑΣΙΚΟΤΑΤΟ)

Οι συναρτήσεις $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_i(\bar{x}) = x_i$ είναι

συνεχής (στον $\mathbb{R}^n$) όπου $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ $i = 1, 2, \dots n$

ΛΥΣΗ

Έστω $\bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)})$ με $\bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)})$

όπου $\bar{x}_\nu \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \bar{x}_0 \iff \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \implies$

$$\implies |\underbrace{x_\nu^{(i)}}_{f_i(x_\nu)} - \underbrace{x_0^{(i)}}_{f_i(x_0)}| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

Το προηγούμενο παράδειγμα είναι βασικό διότι μέσω της χρήσης της προηγούμενης πρότασης προκύπτει ότι όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στον $\mathbb{R}^n$, οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο π.ο τους.

Παράδειγμα 1ο:

Η $f(x,y) = x\cdot y$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Η $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής αφού οι

$(x,y) \xmapsto{f_1} x = f_1(x,y)$ και $(x,y) \xrightarrow{f_2} y = f_2(x,y)$

(δηλ οι προβολές του (x,y) στον άξονα των x και στον άξονα των y) είναι συνεχείς

και άρα το γινόμενο τους

$(x,y) \xmapsto{f_1\cdot f_2} x\cdot y = (f_1\cdot f_2)(x,y)$ συνεχής συνάρτηση

σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$

Παράδειγμα 2ο:

Έστω η συνάρτηση $h(x,y) = \dfrac{x\cdot y(2+y^2)}{(x+1)^2+y^2}$, $(x,y)\neq(-1,0)$

Η $h:\mathbb{R}^2\setminus\{(-1,0)\}\to\mathbb{R}$

είναι συνεχής στο π.ο ως ρητή συνάρτηση

(δηλ έχουμε $h=\dfrac{h_1}{h_2}$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(-1,0)\}$ και οι $h_1,h_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς)

Αν βρίσκαμε ένα $l\in\mathbb{R}$ ώστε $\tilde{h}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και

$$\tilde{h}(x,y) = \begin{cases} h(x,y), & (x,y)\neq(-1,0) \\ l, & (x,y)=(-1,0)\end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)} h(x,y)$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(-1,0)} \frac{x\cdot y(2+y^2)}{(x+1)^2+y^2} = \lim_{(x+1,y)\to(0,0)} h(x-1,y) =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-1)y(2+y^2)}{x^2+y^2} \overset{(*)}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-1)y}{x^2+y^2}\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} (2+y^2)$$

Πρέπει όμως πρώτου κάναμε το βήμα (*) να εξετάσουμε εάν τα όρια υπάρχουν

Αφού για $(\frac{1}{v},0)\to(0,0)$ τότε $h(\frac{1}{v},0)=0 \xrightarrow{v\to\infty} 0$
Ενώ για $(0,\frac{1}{v})\to(0,0)$ τότε $h(0,\frac{1}{v})=-v \xrightarrow{v\to\infty} -\infty$

Άρα, το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x-1,y)$ δεν υπάρχει

ΓΕΝΙΚΑ → Εαν σε μια ρητή συνάρτηση ο βαθμός του πολυωνύμου στον Αριθμητή είναι μικρότερος ή ίσος από το βαθμό του παρονομαστή πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όταν εξετάζουμε το όριο της συνάρτησης σε σημεία που μηδενίζονται και ο αριθμητής αλλά και ο παρονομαστής

Πχ
Εαν $h_1(x,y)=\frac{(x-1)y\cdot x}{x^2+y^2}$ τότε αφού $\left|\frac{(x-1)x\cdot y}{x^2+y^2}\right|\le|x-1|$ τότε σίγουρα θα είχα $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} h_1(x,y)=0$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $U\subseteq\mathbb{R}^n$ με $\bar{f}:U\to\mathbb{R}^m$
$\bar{f}=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}$ με $\bar{x}_0$ σσ του U. Τότε λέμε ότι η $\bar{f}$ τείνει στο όριο $\bar{l}\in\mathbb{R}^m$, όταν $\bar{x}\xrightarrow{v\to\infty}\bar{x}_0\in\mathbb{R}^n$ αν $\forall(\bar{x}_v)\subset U\setminus\{\bar{x}_0\}: \bar{x}_v\xrightarrow{v\to\infty}x_0 \Rightarrow f(\bar{x}_v)\to\bar{l} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall j=1,2,\dots,m$ με $f_j(\bar{x}_v)\to l_j$ όπου $\bar{l}=\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_m\end{pmatrix}$. Το όριο μιας διανυσματικής συνάρτησης f σε ένα σημείο $\bar{x}_0$ είναι μοναδικό και γράφεται $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x})=\bar{l}$

Παρατήρηση:
$\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0}\bar{F}(\bar{x})=\bar{l}\Leftrightarrow\forall j=1,2,\dots,m$ είναι $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0}f(\bar{x})=l_j$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η $\bar{f}:U\to\mathbb{R}^m$, $U\subseteq\mathbb{R}^n \Rightarrow \bar{f}(\bar{x}_v)\xrightarrow{v\to\infty}\bar{f}(\bar{x}_0)$
Απο παρατήρηση έχουμε
$\bar{f}=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$ συνεχής στο $\bar{x}_0 \Leftrightarrow \forall j=1,\dots,m$ f_j συνεχ. στο $\bar{x}_0$